

La geometría de la dirección

Inercia direccional, ruptura de simetría
y el costo de cambiar el movimiento
en física fundamental

Santiago Tristany

2026

Contenido

MECÁNICA CLÁSICA, GEOMETRÍA DE LA INERCIA DIRECCIONAL Y RUPTURA DE SIMETRÍA POR EL ESTADO	3
MECÁNICA RELATIVISTA Y GEOMETRÍA DE MINKOWSKI	9
MECÁNICA RELATIVISTA, CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO Y LA GEOMETRÍA DE LA INERCIA DIRECCIONAL.....	16
MECÁNICA CUÁNTICA: DIRECCIÓN, MOMENTO ANGULAR Y EL COSTO DE REDIRIGIR UN ESTADO.....	22
TEORÍA DE CAMPOS: RUPTURA ESPONTÁNEA DE SIMETRÍA, VACÍO Y LA GEOMETRÍA DE LA INERCIA DIRECCIONAL.....	31

Mecánica clásica, geometría de la inercia direccional y ruptura de simetría por el estado

1. Introducción: la dirección como grado de libertad físico

En mecánica clásica, el estado de movimiento de un cuerpo queda completamente descrito por su vector de momento lineal

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Este vector posee magnitud y dirección. La magnitud se relaciona con la energía cinética; la dirección define la orientación de la trayectoria en el espacio. Durante el movimiento inercial, la ausencia de fuerzas externas garantiza que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0,$$

por lo que tanto la rapidez como la dirección permanecen constantes. La pregunta fundamental que abordaremos es: **¿qué costo físico tiene cambiar únicamente la dirección de $\vec{p}$, manteniendo su magnitud?**

Mostraremos que ese costo no depende de la dirección absoluta, sino del **ángulo relativo entre el estado inicial y el estado final**, y que esta dependencia es una manifestación de la geometría del espacio de momentos y de la anisotropía inducida por el propio estado del sistema.

2. Cinemática vectorial y descomposición intrínseca de la aceleración

En un sistema de referencia inercial bidimensional (x, y) , la posición es

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j},$$

y su dirección instantánea está dada por el ángulo

$$\alpha(t) = \text{atan2}(y(t), x(t)).$$

La velocidad

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

tiene magnitud $v(t)$ y dirección $\theta_v(t)$, de modo que

$$\vec{v}(t) = v(t)\cos\theta_v(t)\hat{i} + v(t)\sin\theta_v(t)\hat{j}.$$

La aceleración se obtiene derivando:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{e}_t + v \frac{d\theta_v}{dt} \hat{e}_n,$$

donde $\hat{e}_t$ es el vector unitario tangente a la trayectoria y $\hat{e}_n$ el unitario normal. Esta es la **descomposición intrínseca de Frenet-Serret**.

La componente tangencial cambia la rapidez; la componente normal

$$a_{\perp} = v \frac{d\theta_v}{dt}$$

cambia exclusivamente la dirección. Por tanto, una maniobra de cambio de dirección puro requiere una aceleración perpendicular, y el ritmo de giro está dado por

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{a_{\perp}}{v}.$$

3. Momento lineal, impulso y cambio de dirección puro

El momento lineal

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

comparte la dirección de $\vec{v}$. Por tanto, cambiar la dirección del movimiento es cambiar el ángulo de $\vec{p}$.

El impulso necesario para producir un cambio finito de momento es

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i.$$

Si se desea cambiar únicamente la dirección, manteniendo $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = p$, la magnitud del impulso es

$$J = |\Delta\vec{p}| = 2p \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right),$$

donde $\Delta\theta$ es el ángulo entre $\vec{p}_i$ y $\vec{p}_f$. Para ángulos pequeños,

$$J \approx p \Delta\theta = mv \Delta\theta.$$

Este resultado es idéntico al que aparece en astrodinámica como el **presupuesto de Delta-v para una maniobra de cambio de plano**: el impulso requerido es proporcional al momento lineal y al ángulo de desviación.

4. Costo energético mínimo y resistencia angular efectiva

El impulso J debe ser suministrado por un impactador o sistema externo. Si la masa del impactador es m_I , y consideramos una colisión perfectamente inelástica en la que

el impactador se detiene en el marco del asteroide, la energía cinética relativa mínima necesaria es

$$K_{\min} = \frac{J^2}{2m_I}.$$

Sustituyendo la expresión de J ,

$$K_{\min} = \frac{2m_A^2 v_A^2}{m_I} \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right),$$

y para ángulos pequeños,

$$K_{\min} \approx \frac{m_A^2 v_A^2}{2m_I} (\Delta\theta)^2.$$

La energía crece cuadráticamente con el ángulo de desviación.

Definimos ahora la **resistencia angular efectiva** como la derivada de la energía mínima respecto al ángulo:

$$R_\theta = \frac{dK_{\min}}{d(\Delta\theta)}.$$

Para el caso exacto,

$$R_\theta = \frac{m_A^2 v_A^2}{m_I} \sin(\Delta\theta),$$

y para ángulos pequeños,

$$R_\theta \approx \frac{m_A^2 v_A^2}{m_I} \Delta\theta.$$

Esta cantidad mide cuánto cuesta cada grado adicional de desviación. Es análoga a la constante de un resorte torsional, cuya energía es $U = \frac{1}{2}k\theta^2$ y cuyo torque restaurador es $\tau = k\theta$. Aquí, la inercia direccional juega el papel de un resorte angular: el costo marginal crece linealmente con el ángulo ya desviado.

5. Colisiones en 2D y dependencia de los ángulos relativos

En un escenario realista de impacto, el impulso transferido depende de la **velocidad relativa** entre impactador y asteroide. En el plano (x, y) , los momentos son

$$\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A, \quad \vec{p}_I = m_I \vec{v}_I.$$

La velocidad relativa es

$$\vec{v}_{I/A} = \vec{v}_I - \vec{v}_A,$$

y su magnitud depende del ángulo ϕ entre $\vec{v}_I$ y $\vec{v}_A$:

$$|\vec{v}_{I/A}| = \sqrt{v_I^2 + v_A^2 - 2v_I v_A \cos\phi}.$$

Durante la colisión, el impulso normal a la superficie de contacto es

$$J_n = m_I(1 + e)|\vec{v}_{I/A}|\cos\theta,$$

donde e es el coeficiente de restitución y θ es el ángulo de incidencia respecto a la normal de contacto. Esta es la **teoría estándar de colisiones oblicuas**.

La eficiencia del impacto para desviar al asteroide depende, por tanto, de dos ángulos:

- ϕ , que determina la magnitud de la velocidad relativa;
- θ , que determina cuánto de esa velocidad relativa se transforma en impulso normal.

Un impacto frontal opuesto ($\phi = 180^\circ$) maximiza $|\vec{v}_{I/A}|$; un impacto con trayectorias paralelas en el mismo sentido ($\phi = 0^\circ$) lo minimiza. Además, para que el impulso cambie solo la dirección del asteroide, debe tener una componente perpendicular a $\vec{p}_A$; cualquier componente paralela alterará también la rapidez.

6. Simetría, isotropía y anisotropía inducida por el estado

El teorema de Noether asocia la homogeneidad del espacio con la conservación del momento lineal. Un asteroide aislado mantiene constante $\vec{p}$ porque las leyes no distinguen entre puntos del espacio.

La isotropía del espacio (invariancia bajo rotaciones) asegura que las leyes no distinguen entre direcciones absolutas. Si rotamos todo el sistema físico un ángulo α , los resultados son idénticos. Formalmente, si $R(\alpha)$ es la matriz de rotación,

$$\vec{p}_i' = R(\alpha)\vec{p}_i, \quad \vec{p}_f' = R(\alpha)\vec{p}_f,$$

y el ángulo entre ellos, $\Delta\theta$, permanece invariante:

$$\cos(\Delta\theta') = \frac{\vec{p}_i' \cdot \vec{p}_f'}{|\vec{p}_i'| |\vec{p}_f'|} = \cos(\Delta\theta).$$

Por tanto, la energía requerida, que depende de $\Delta\theta$, es invariante bajo rotaciones.

¿Cómo se resuelve entonces la aparente paradoja de que haya direcciones más costosas que otras? La clave es distinguir entre **simetría de las leyes** y **simetría del estado**.

- El espacio vacío es isótropo: ninguna dirección absoluta es especial.

- Pero un asteroide con $\vec{p} \neq 0$ **introduce una anisotropía local**. El vector $\vec{p}$ define un eje privilegiado: la dirección del movimiento. El espacio alrededor del asteroide tiene simetría cilíndrica (axial) alrededor de $\vec{p}$, no esférica.

Esta anisotropía no es una ruptura espontánea de simetría en el sentido técnico del término (no hay un potencial simétrico con un vacío degenerado), sino una **anisotropía inducida por el estado**: las leyes son isótropas, pero el estado particular del sistema no lo es. La dirección de $\vec{p}$ está fijada por las condiciones iniciales, no por una degeneración del vacío.

Así, el costo energético no depende de hacia dónde se apunte en el espacio absoluto, sino de cuán separado angularmente esté el estado final del estado inicial. El objeto en movimiento introduce una dirección de referencia local, y la energía necesaria para cambiarla es proporcional a la desviación respecto a esa referencia.

7. La métrica de la hodógrafa y la distancia angular

La hodógrafa es el espacio de velocidades (o momentos). En mecánica clásica, este espacio es euclidiano. La métrica inducida es

$$ds^2 = dp^2 + p^2 d\theta^2.$$

Para un cambio de dirección puro ($dp = 0$), la distancia entre dos estados con la misma magnitud p y separación angular $\Delta\theta$ es

$$\Delta s = p \Delta\theta.$$

La energía mínima para producir ese cambio es proporcional al cuadrado de esa distancia:

$$K_{\min} \propto (\Delta s)^2 = p^2 (\Delta\theta)^2.$$

Por tanto, **el ángulo no es una etiqueta arbitraria**: es la coordenada natural que mide la separación entre estados sobre la esfera de radio p en el espacio de momentos. La energía está codificada en la métrica de ese espacio.

8. Interpretación física: inercia direccional

La inercia en mecánica clásica suele enseñarse como resistencia a cambios de rapidez. Pero la inercia real es vectorial: el cuerpo se resiste a cualquier cambio de su vector de momento, incluida su dirección.

El concepto de **resistencia angular efectiva**

$$R_\theta \approx \frac{m_A^2 v_A^2}{m_I} \Delta\theta$$

captura esta inercia direccional. Es una magnitud con dimensiones de energía por radián, y crece linealmente con el ángulo ya desviado. Esto es análogo a un resorte torsional, donde la energía almacenada es cuadrática en el ángulo y el torque restaurador es proporcional al ángulo.

No se trata de una fricción real, sino de una consecuencia de la geometría del espacio de momentos y de la necesidad de transferir impulso mediante una interacción. La energía no se disipa necesariamente; se redistribuye entre los cuerpos, pero el costo para el impactador está determinado por la cantidad de impulso que debe entregar.

9. Conclusión general

En esta extensión hemos formalizado la relación entre impulso, energía y cambio de dirección en mecánica clásica, y la hemos conectado con la estructura geométrica del espacio de momentos y con la simetría de las leyes físicas.

Los resultados principales son:

1. **Impulso para cambio de dirección puro:**

$$J = 2p \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

2. **Energía mínima requerida:**

$$K_{\min} \propto \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right),$$

y para ángulos pequeños,

$$K_{\min} \propto (\Delta\theta)^2.$$

3. **Resistencia angular efectiva:**

$$R_\theta = \frac{dK_{\min}}{d(\Delta\theta)} \propto \Delta\theta.$$

4. **Invariancia rotacional y anisotropía inducida por el estado:** la energía depende solo del ángulo relativo $\Delta\theta$, no de la orientación absoluta, porque el estado $\vec{p} \neq 0$ introduce una anisotropía local.

5. **Geometría de la hodógrafa:** el ángulo es una coordenada métrica en el espacio de momentos; cambiar la dirección es moverse sobre una esfera de radio p , y el costo es proporcional al cuadrado de la distancia recorrida.

Estos resultados son conocidos en astrodinámica (Delta-v para cambio de plano) y en la teoría de colisiones, pero la presentación unificada mediante la noción de **resistencia angular efectiva** y la interpretación geométrica de la inercia direccional

constituye un enfoque pedagógico novedoso que permite pensar estos problemas con una perspectiva más profunda.

La dirección del movimiento no es un simple dato cinemático: es un grado de libertad con un costo energético real, gobernado por la geometría del espacio de momentos y por la anisotropía inducida por el propio estado del sistema.

Mecánica relativista y geometría de Minkowski

1. El momento lineal en relatividad especial

En relatividad especial, el momento de una partícula de masa en reposo m y velocidad $\vec{v}$ es

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

La energía total es

$$E = \gamma mc^2,$$

y ambas se relacionan por el invariante

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$

Escribiremos $\beta = v/c$, de modo que

$$p = \gamma mc\beta.$$

2. Cambio de dirección y momento requerido

Queremos rotar el vector momento del asteroide un ángulo $\Delta\theta$ manteniendo su magnitud p_A .

El cambio vectorial tiene magnitud

$$|\Delta\vec{p}_A| = 2p_A \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

Con $p_A = \gamma_A m_A c \beta_A$:

$$J = 2\gamma_A m_A c \beta_A \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

Para ángulos pequeños:

$$J \approx \gamma_A m_A v_A \Delta\theta.$$

Aquí aparece el factor γ_A : la inercia a cambiar de dirección crece con γ_A . Este es el contenido de la antigua idea de **masa transversal** $m_T = \gamma m$: la resistencia a aceleraciones perpendiculares al movimiento.

3. Interpretación geométrica: la transferencia de cuádrimomento es espacial

En lenguaje de cuádrivectores, el asteroide antes del impacto tiene cuádrimomento

$$P_A = \left(\frac{E_A}{c}, \vec{p}_A \right),$$

y después, con la misma energía pero dirección rotada,

$$P_A' = \left(\frac{E_A}{c}, \vec{p}_A' \right).$$

La transferencia de cuádrimomento es

$$Q = P_A' - P_A = (0, \Delta \vec{p}_A).$$

Su norma invariante es

$$Q^2 = -|\Delta \vec{p}_A|^2 = -J^2 < 0.$$

Es decir, Q es un cuádrivector de **tipo espacial**. Esta observación es profunda:

- Ninguna partícula real individual puede ser absorbida para producir una transferencia puramente espacial sin dejar restos, porque una partícula real tiene $P^2 = m^2 c^2 > 0$ (tipo temporal).
- Por tanto, una maniobra de cambio de dirección puro (a rapidez constante) **requiere necesariamente una colisión con escombros o radiación** que se lleven el exceso de invariante.
- El asteroide está confinado a la **capa de masa** $P^2 = m_A^2 c^4$, que en el espacio de momentos es una hiperboloide tridimensional. Cambiar la dirección sin cambiar la energía equivale a moverse sobre una sección espacial de esa hiperboloide.

Cabe precisar la geometría: la capa de masa completa, parametrizada por la rapidez η , es un espacio hiperbólico tridimensional H^3 . Sin embargo, al fijar la energía (o equivalentemente la rapidez η), nos restringimos a una subvariedad bidimensional que es una esfera ordinaria S^2 de radio $p = mc \sinh \eta$. Por tanto, el subproblema de cambio de dirección a energía constante se resuelve sobre una esfera, aunque la estructura global de la capa de masa sea hiperbólica.

4. Costo energético mínimo: dos escenarios límite

a) Escenario simplificado: absorción total en el laboratorio

Si suponemos que el impactador se incrusta y los escombros quedan en reposo en el marco del laboratorio, la conservación del cuadrimomento exige que el impactador inicial tenga momento $\vec{p}_I = \vec{J}$ y energía

$$E_I = \sqrt{m_I^2 c^4 + J^2 c^2}.$$

La energía cinética mínima es entonces

$$K_{\text{abs}} = E_I - m_I c^2 = m_I c^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{J}{m_I c} \right)^2} - 1 \right].$$

Sustituyendo J :

$$K_{\text{abs}} = m_I c^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2\gamma_A m_A \beta_A}{m_I} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \right)^2} - 1 \right].$$

Para ángulos pequeños:

$$K_{\text{abs}} \approx \begin{cases} \frac{\gamma_A^2 m_A^2 v_A^2}{2m_I} \Delta\theta^2, & \text{si } p_A \Delta\theta \ll m_I c, \\ p_A c \Delta\theta \approx E_A \Delta\theta, & \text{si } p_A \Delta\theta \gg m_I c. \end{cases}$$

Este resultado muestra que el costo crece con γ_A , y en el régimen ultrarelativista se vuelve lineal en $\Delta\theta$ y proporcional a E_A .

b) Mínimo teórico real: dispersión elástica (rebote)

El escenario anterior es ineficiente: obliga al impactador a traer todo el momento J y luego detenerse, convirtiendo su energía en masa de escombros.

Si permitimos que el impactador rebote elásticamente, la cinemática de Minkowski permite una transferencia más eficiente. **En el límite en que el asteroide es mucho más masivo que el impactador ($m_A \gg m_I$)**, el asteroide actúa aproximadamente como una pared reflectante. En este régimen, el impactador puede invertir su momento normal, de modo que el momento inicial necesario es solo

$$p_I = \frac{J}{2}.$$

Al rebotar, invierte su dirección y transfiere al asteroide un momento total J . La energía cinética mínima es

$$K_{\text{rebote}} = \sqrt{m_I^2 c^4 + \left(\frac{J}{2}\right)^2 c^2} - m_I c^2.$$

En los dos regímenes:

- **No relativista** ($J \ll m_I c$):

$$K_{\text{rebote}} \approx \frac{J^2}{8m_I} = \frac{1}{4} K_{\text{abs}}.$$

El rebote es **cuatro veces más eficiente**.

- **Ultrarelativista** ($J \gg m_I c$):

$$K_{\text{rebote}} \approx \frac{Jc}{2} = \frac{1}{2} K_{\text{abs}}.$$

El rebote es **dos veces más eficiente**.

Para masas comparables, el acoplamiento entre energía y momento en la colisión elástica de dos cuerpos modifica estos factores, y se requiere un análisis completo de la cinemática de la colisión.

c) Mínimo absoluto: aniquilación en un fotón

Si el impactador se aniquila emitiendo un único fotón hacia atrás, la masa en reposo de los escombros es cero. La conservación da

$$p_I = \frac{J}{2} - \frac{m_I^2 c^2}{2J}$$

y la energía mínima es aún menor, aunque la diferencia es despreciable en los casos extremos.

Este es el límite matemático absoluto.

5. Expresión unificada para el costo mínimo real

Para el rebote elástico, definiendo $x = \frac{J}{2m_I c}$,

$$K_{\text{min}} = m_I c^2 \left[\sqrt{1 + x^2} - 1 \right],$$

donde $J = 2\gamma_A m_A c \beta_A \sin(\Delta\theta/2)$.

Para ángulos pequeños:

$$K_{\min} \approx \begin{cases} \frac{\gamma_A^2 m_A^2 v_A^2}{8m_I} \Delta\theta^2, & \text{si } p_A \Delta\theta \ll 2m_I c, \\ \frac{1}{2} p_A c \Delta\theta \approx \frac{1}{2} E_A \Delta\theta, & \text{si } p_A \Delta\theta \gg 2m_I c. \end{cases}$$

La dependencia con $\Delta\theta$ y γ_A se mantiene, pero con coeficientes reducidos.

6. Resistencia angular efectiva relativista

Definimos la resistencia angular efectiva como

$$R_\theta = \frac{dK_{\min}}{d(\Delta\theta)}.$$

Usando el rebote elástico, con $x = \frac{J}{2m_I c}$:

$$K_{\min} = m_I c^2 \left[\sqrt{1 + x^2} - 1 \right].$$

La derivada de $K_{\min}$ respecto a x es

$$\frac{dK_{\min}}{dx} = \frac{m_I c^2 x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

La derivada de x respecto al ángulo es

$$\frac{dx}{d(\Delta\theta)} = \frac{\gamma_A m_A \beta_A}{2m_I} \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right),$$

puesto que

$$x = \frac{\gamma_A m_A \beta_A}{m_I} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

Por tanto,

$$R_\theta = \frac{dK_{\min}}{d(\Delta\theta)} = \frac{m_I c^2 x}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{\gamma_A m_A \beta_A}{2m_I} \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

Para ángulos pequeños, $x \approx \frac{\gamma_A m_A \beta_A}{m_I} \frac{\Delta\theta}{2}$ y $\cos(\Delta\theta/2) \approx 1$.

Entonces

$$R_\theta \approx m_I c^2 \left(\frac{\gamma_A m_A \beta_A}{m_I} \frac{\Delta\theta}{2} \right) \left(\frac{\gamma_A m_A \beta_A}{2m_I} \right) = \frac{\gamma_A^2 m_A^2 c^2 \beta_A^2}{4m_I} \Delta\theta.$$

Como $c^2 \beta_A^2 = v_A^2$,

$$R_\theta \approx \frac{\gamma_A^2 m_A^2 v_A^2}{4m_I} \Delta\theta.$$

Este resultado coincide con la derivada directa de la expresión de ángulo pequeño

$$K_{\min} \approx \frac{\gamma_A^2 m_A^2 v_A^2}{8m_I} \Delta\theta^2.$$

En el régimen ultrarelativista, la resistencia angular tiende a

$$R_\theta \rightarrow \frac{1}{2} p_{AC} = \frac{1}{2} E_A,$$

independiente de $\Delta\theta$ en el límite dominante, aunque la expresión completa conserva la dependencia a través de x .

7. Simetría y geometría: de la esfera clásica a la hiperboloide de masa

La mecánica clásica vive en un espacio de momentos euclidiano, donde los estados de igual momento yacen sobre una esfera de radio p .

En relatividad especial, el espacio de momentos está dotado de la métrica de Minkowski, y la condición de capa de masa

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

define una hiperboloide tridimensional H^3 . La distancia natural entre dos estados sobre esta hiperboloide es hiperbólica, no euclidiana.

Sin embargo, el problema específico que hemos resuelto —cambiar la dirección del vector momento manteniendo constante su magnitud— corresponde a fijar la rapidez η . Esto equivale a tomar una sección de la hiperboloide de curvatura constante, que es una esfera S^2 de radio

$$p = mc \sinh \eta.$$

La métrica inducida sobre esta sección es

$$ds^2 = p^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

formalmente idéntica a la de una esfera euclidiana de radio p . La diferencia con el caso clásico reside en la magnitud del radio: aquí $p = \gamma m v$, que crece sin cota al acercarse $v \rightarrow c$.

Así, la geometría global de la capa de masa es hiperbólica, pero el subproblema de cambio de dirección a energía constante se resuelve sobre una esfera cuyo radio contiene toda la información relativista. El grupo de simetría sigue siendo el de

rotaciones espaciales $SO(3)$, subgrupo del grupo de Lorentz $SO(1,3)$, y la isotropía espacial se mantiene: rotar todo el sistema no cambia la física.

El costo energético depende solo del ángulo relativo $\Delta\theta$ y de la rapidez η (a través de γ_A). La anisotropía es inducida por el estado $\vec{p}_A \neq 0$, no por las leyes.

8. Conclusión de la extensión relativista

La relatividad especial modifica la relación impulso-ángulo en tres niveles:

1. **Momento mayor:** $p_A = \gamma_A m_A v_A \Rightarrow$ el impulso requerido crece con γ_A .
2. **Geometría espacial del cuádrimomento:** una desviación pura exige una transferencia de cuádrimomento espacial ($Q^2 < 0$), lo que implica colisiones con escombros y no permite absorción simple.
3. **Costo energético mínimo real:** si se permite rebote elástico en el límite $m_A \gg m_I$, la energía necesaria es la cuarta parte (no relativista) o la mitad (ultrarelativista) de la que daría la absorción total.

En síntesis:

$$K_{\min} \approx \begin{cases} \frac{\gamma_A^2 m_A^2 v_A^2}{8m_I} \Delta\theta^2, & p_A \Delta\theta \ll 2m_I c, \\ \frac{1}{2} E_A \Delta\theta, & p_A \Delta\theta \gg 2m_I c. \end{cases}$$

La resistencia angular efectiva relativista es

$$R_\theta \approx \begin{cases} \frac{\gamma_A^2 m_A^2 v_A^2}{4m_I} \Delta\theta, & \text{no relativista,} \\ \frac{1}{2} E_A, & \text{ultrarelativista.} \end{cases}$$

Todo esto muestra que desviar un objeto rápido es energéticamente cada vez más costoso, y la estructura del espacio-tiempo de Minkowski se manifiesta en ese costo a través de la hipérboloide de masa y del carácter espacial de la transferencia de momento.

Mecánica relativista, curvatura del espacio-tiempo y la geometría de la inercia direccional

Introducción

En mecánica clásica y relatividad especial, la dirección de un vector momento lineal se compara mediante el ángulo euclidiano o minkowskiano definido por una métrica constante. En relatividad general, la estructura del espacio-tiempo es dinámica y curvada. Esto modifica profundamente la noción de distancia entre direcciones: el ángulo entre vectores en puntos distintos no está definido de manera única, y la comparación de momentos en diferentes lugares requiere un transporte paralelo que depende del camino.

Esta extensión formaliza cómo la curvatura del espacio-tiempo altera la relación entre impulso, energía y cambio de dirección, y cómo la inercia direccional se manifiesta en un contexto donde la isotropía del espacio es solo local.

1. Cuadrimomento en un espacio-tiempo curvo

Sea $(M, g_{\mu\nu})$ un espacio-tiempo curvo con signatura $(+, -, -, -)$. Una partícula de masa m describe una geodésica. Su cuadrimomento es

$$P^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

donde τ es el tiempo propio. La condición de capa de masa es

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m^2 c^2.$$

En un punto dado x , un observador con cuadrivelocidad u^μ (normalizada como $u^\mu u_\mu = c^2$) descompone el cuadrimomento en una parte temporal y una espacial:

$$P^\mu = \frac{E}{c^2} u^\mu + p^\mu,$$

donde p^μ es el momento espacial y satisface

$$p^\mu u_\mu = 0.$$

La energía medida por el observador es

$$E = u_\mu P^\mu.$$

Con la signatura $(+, -, -, -)$, los vectores puramente espaciales tienen norma al cuadrado negativa respecto a $g_{\mu\nu}$. Para obtener una métrica espacial definida positiva, definimos

$$h_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u_\mu u_\nu.$$

Esta métrica espacial inducida es positiva definida sobre el subespacio ortogonal a u^μ . La magnitud del momento espacial es

$$p^2 = h_{\mu\nu} p^\mu p^\nu > 0.$$

Con esta métrica, la condición de capa de masa equivale a

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

En un punto dado, la métrica espacial h_{ij} determina la geometría de las direcciones posibles del momento.

2. Ángulo entre direcciones y distancia sobre la esfera de momentos

El espacio de momentos espaciales en un punto es un espacio vectorial tridimensional con métrica h_{ij} . Las direcciones del momento corresponden a vectores unitarios sobre la esfera

$$S_p^2 = \{p^i \in \mathbb{R}^3 : h_{ij} p^i p^j = p^2\}.$$

Dados dos momentos de igual magnitud p con direcciones diferentes, el ángulo geodésico θ entre ellos se define mediante el producto escalar

$$\cos\theta = \frac{h_{ij} p_1^i p_2^j}{p^2}.$$

La distancia geodésica sobre la esfera de momentos es

$$\Delta s = p \theta,$$

donde θ se mide en radianes. Si la métrica espacial es localmente euclidiana ($h_{ij} = \delta_{ij}$), esta es la relación usual. La curvatura intrínseca de la esfera de momentos es $1/p^2$, independiente de la curvatura del espacio-tiempo; la métrica espacial solo fija el radio de la esfera, no su geometría local, que es siempre esférica.

Sin embargo, la comparación de direcciones en **puntos diferentes** del espacio-tiempo no es trivial: requiere transportar paralelamente el vector momento a lo largo de una curva que conecte los puntos. La curvatura del espacio-tiempo produce que el resultado dependa del camino.

3. Cambio de dirección local y costo energético

Consideremos una colisión local en un punto del espacio-tiempo. El principio de equivalencia garantiza que en un entorno suficientemente pequeño podemos elegir un sistema de coordenadas localmente inercial donde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y la conexión se anula. En tal sistema, las leyes de la relatividad especial se aplican exactamente en el punto de colisión.

Por tanto, el cambio de dirección del momento espacial manteniendo su magnitud p requiere un impulso cuya magnitud está dada por

$$J = 2p \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right),$$

donde $\Delta\theta$ es el ángulo geodésico local entre las direcciones inicial y final, calculado con la métrica espacial h_{ij} en ese punto. Para ángulos pequeños,

$$J \approx p \Delta\theta.$$

El costo energético mínimo para un impactador de masa m_I en el límite $m_A \gg m_I$ sigue siendo

$$K_{\min} = \sqrt{m_I^2 c^4 + \left(\frac{J}{2}\right)^2 c^2} - m_I c^2,$$

con los límites ya estudiados.

Conviene ser explícito: esta validez es **estrictamente puntual**. Una colisión real, que ocupa una región finita del espacio-tiempo, ya incorpora correcciones de orden superior en curvatura. La curvatura modifica la relación local solo en la medida en que nos alejamos del punto exacto del impacto.

4. Transporte paralelo y holonomía: la no globalidad de las direcciones

En un espacio-tiempo curvo, el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva cerrada no devuelve el vector original. La diferencia es proporcional al tensor de curvatura de Riemann:

$$\Delta V^\mu = \oint \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha dx^\beta,$$

y en un lazo infinitesimal,

$$\Delta V^\mu \approx \frac{1}{2} R_{\nu\alpha\beta}^\mu V^\nu \Delta A^{\alpha\beta},$$

donde $\Delta A^{\alpha\beta}$ es el área orientada encerrada por el lazo.

Esta holonomía implica que no existe una noción global única de “dirección” en un espacio-tiempo curvo. La dirección de un vector momento en un punto no puede compararse de forma absoluta con la dirección en otro punto sin especificar el camino de transporte. Por tanto, el ángulo entre direcciones pierde su carácter absoluto y se convierte en una cantidad dependiente de la trayectoria.

Esto tiene consecuencias profundas para la idea de inercia direccional: un objeto que se mueve inercialmente en un espacio curvo sigue una geodésica, y su vector momento se transporta paralelamente a lo largo de su propia trayectoria. Si el espacio-tiempo es curvo, la dirección del momento puede rotar respecto a un sistema de referencia global fijo incluso sin fuerzas externas. Este efecto es la **precesión geodésica** (o efecto de Sitter): la rotación de un vector transportado paralelamente a lo largo de una geodésica cerrada o semi-cerrada. Es un fenómeno distinto de la desviación geodésica, que describe la aceleración relativa entre dos geodésicas vecinas gobernada por

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\nu\alpha\beta} u^\nu \xi^\alpha u^\beta.$$

Ambos efectos provienen del mismo tensor de Riemann, pero describen aspectos diferentes de la curvatura: la desviación geodésica es un efecto de marea sobre separaciones entre trayectorias, mientras que la precesión geodésica es un efecto de holonomía sobre la orientación de un vector a lo largo de una sola trayectoria.

5. Simetrías, vectores de Killing y conservación del momento angular

En relatividad general, el teorema de Noether se generaliza: si el espacio-tiempo admite un vector de Killing ξ^μ , entonces la cantidad

$$C = \xi_\mu P^\mu$$

se conserva a lo largo de la geodésica.

La isotropía del espacio en relatividad especial corresponde a la existencia de tres vectores de Killing rotacionales que generan el grupo $SO(3)$. En un espacio-tiempo curvo genérico, estas simetrías no existen. Por tanto, **la isotropía del espacio-tiempo es una propiedad local, no global**: en un entorno pequeño, siempre podemos elegir coordenadas donde la métrica parece minkowskiana, pero globalmente la curvatura rompe la simetría rotacional.

Cuando existe un vector de Killing axial (por ejemplo, en un espacio-tiempo con simetría esférica o axial), se conserva el momento angular correspondiente. En el espacio-tiempo de Schwarzschild, el vector de Killing $\xi_\phi = \partial_\phi$ genera la conservación del momento angular orbital:

$$L = P_\phi = mr^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \text{constante}.$$

Cambiar la dirección del movimiento de un cuerpo en órbita implica cambiar su momento angular, lo que requiere una interacción externa. La curvatura vincula el momento lineal con el momento angular: en un campo gravitatorio, una desviación de la geodésica exige un impulso que modifica tanto la dirección como el momento angular.

6. Ejemplo: espacio-tiempo de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Para un observador estático en $r = \text{constante}$, la métrica espacial inducida (definida positiva) es

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

La esfera de direcciones del momento en un punto tiene radio p , pero el espacio físico circundante es anisotrópico: la coordenada radial está estirada por el factor $(1 - 2GM/(c^2 r))^{-1/2}$. Esto significa que las distancias radiales y angulares no son equivalentes; la métrica espacial no es conforme a la euclidiana.

El ángulo entre dos direcciones del momento en ese punto se define mediante esta métrica espacial. Si consideramos dos direcciones con la misma magnitud p separadas por un ángulo $\Delta\theta$ en el plano $\theta = \pi/2$ (direcciones puramente angulares), la distancia sobre la esfera de momentos es $p\Delta\theta$, igual que en el caso euclidiano, porque a r fijo la parte angular de la métrica es conforme a la esférica euclidiana.

Si una de las direcciones tiene componente radial, el ángulo geodésico se modifica porque la métrica espacial pondera de manera distinta las componentes radiales y angulares. La relación entre el ángulo geodésico y las diferencias de coordenadas depende de la métrica, y la fórmula $J = 2psin(\Delta\theta/2)$ debe interpretarse con $\Delta\theta$ como el ángulo geodésico definido por h_{ij} .

Consideremos ahora un impactador que cae desde el reposo en el infinito hacia el asteroide. Su energía total por unidad de masa en reposo, conservada a lo largo de la geodésica, es

$$\tilde{e} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau} = 1.$$

Para un observador estático local en la posición r , la velocidad física v de la partícula se obtiene del factor de Lorentz local

$$\gamma_{\text{loc}} = \frac{\tilde{e}}{\sqrt{1 - 2GM/(c^2 r)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/(c^2 r)}}.$$

De la relación relativista entre γ y la velocidad,

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma_{\text{loc}}^2} = 1 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = \frac{2GM}{c^2 r}.$$

Por tanto,

$$v^2 = \frac{2GM}{r}.$$

Este es un resultado notable: la velocidad física medida por un observador estático local de una partícula que cae desde el reposo en el infinito coincide exactamente con la velocidad de escape newtoniana. En coordenadas, la velocidad dr/dt se comporta de manera muy distinta y tiende a cero en el horizonte, pero en el marco local del observador estático —que es donde ocurre la colisión física y donde se mide el impulso J — la relatividad general y la mecánica newtoniana coinciden en este valor específico.

Esta velocidad afecta el momento disponible para el impacto, y por tanto el costo energético efectivo. La inercia direccional en un campo gravitatorio depende no solo de la masa y velocidad del asteroide, sino también del potencial gravitatorio en el punto de colisión.

7. Conclusión

La relatividad general no modifica la relación local entre impulso y cambio de dirección: en un punto, el espacio de momentos tiene una métrica espacial inducida h_{ij} , y la fórmula

$$J = 2p \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

sigue siendo válida, con $\Delta\theta$ interpretado como el ángulo geodésico sobre la esfera de direcciones definida por h_{ij} .

Lo que la curvatura introduce es:

1. **No globalidad de las direcciones:** el transporte paralelo de un momento depende del camino; no existe una comparación absoluta de direcciones en puntos distintos.
2. **Anisotropía local del espacio físico:** la métrica espacial puede ser no isótropa, modificando la relación entre coordenadas angulares y ángulos geodésicos.

3. **Pérdida de isotropía global:** la conservación del momento angular solo se mantiene si existen vectores de Killing rotacionales. En un espacio-tiempo genérico, la isotropía es solo local, y la inercia direccional adquiere un carácter dependiente de la posición.
4. **Precesión geodésica:** el transporte paralelo de un vector momento a lo largo de una geodésica produce una rotación respecto a un sistema de referencia global fijo, efecto gobernado por la holonomía de la conexión.
5. **Acoplamiento entre momento lineal, momento angular y curvatura:** cambiar la dirección de un cuerpo en órbita modifica su momento angular, y la energía necesaria depende del potencial gravitatorio.

La inercia direccional deja de ser una propiedad del objeto en el espacio y se convierte en una propiedad de la conexión afín que dicta cómo se transportan los vectores a través de la variedad. La dirección del movimiento de un cuerpo no es solo una propiedad cinemática: en relatividad general, está entrelazada con la geometría misma del espacio-tiempo.

Mecánica cuántica: dirección, momento angular y el costo de redirigir un estado

Introducción

En las extensiones anteriores, la dirección del movimiento se trató como una variable continua: un vector en el espacio euclidiano, minkowskiano o curvo, cuyo cambio implicaba un costo energético gobernado por la geometría del espacio de momentos. En mecánica cuántica, esta imagen se modifica de manera radical.

La dirección deja de ser una propiedad geométrica continua y se convierte en una propiedad algebraica: los estados de un sistema se organizan en representaciones irreducibles del grupo de rotaciones, etiquetadas por números cuánticos discretos. La inercia direccional no es solo una resistencia cinemática, sino una restricción estructural sobre qué transiciones son posibles y cuál es su costo.

Esta extensión formaliza dos fenómenos distintos que a menudo se confunden:

1. **Rotación unitaria de un estado:** cambiar la orientación de un estado cuántico sin cambiar sus números cuánticos. Es una operación reversible que, en ausencia de campos externos que rompan la simetría, no cuesta energía intrínseca.
2. **Transición entre representaciones:** cambiar la magnitud del momento angular ($l \rightarrow l'$). Requiere una interacción física que no conmute con el momento angular total, y su costo es la diferencia de energía entre niveles.

La distinción es esencial para entender qué significa cambiar la dirección de un sistema cuántico, y conecta directamente con la noción de inercia direccional desarrollada en los documentos anteriores.

1. Momento angular y dirección en mecánica cuántica

En mecánica cuántica, el momento angular es el generador de rotaciones. Para una partícula sin espín, el momento angular orbital es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

cuyas componentes satisfacen el álgebra de Lie de $su(2)$:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k.$$

Los operadores L^2 y L_z conmutan y admiten autoestados comunes $|l, m\rangle$:

$$L^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle, \quad L_z|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle,$$

donde $l = 0, 1, 2, \dots$ y $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$.

El operador L^2 es el **invariante de Casimir** del grupo $SO(3)$: conmuta con todos los generadores,

$$[L^2, L_i] = 0 \quad \forall i.$$

Esto tiene una consecuencia profunda: **una rotación unitaria jamás puede cambiar el valor de l** . Las rotaciones actúan *dentro* de cada representación irreducible, mezclando las proyecciones m pero manteniendo intacta la etiqueta l .

La función de onda angular de un estado $|l, m\rangle$ es el armónico esférico

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle.$$

Estos estados no tienen una dirección espacial bien definida: su distribución de probabilidad angular es difusa, con una incertidumbre angular intrínseca. La dirección solo emerge como un observable aproximado en estados con l grande o en paquetes de ondas angulares localizados, como veremos más adelante.

2. Rotaciones finitas y matrices de Wigner

Una rotación activa de un ángulo α alrededor de un eje unitario $\hat{n}$ se implementa mediante el operador unitario

$$D_{\hat{n}}(\alpha) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{n} \cdot \vec{L}\right).$$

Aplicado a un autoestado $|l, m\rangle$, produce

$$D_{\hat{n}}(\alpha)|l, m\rangle = \sum_{m'=-l}^l D_{m'm}^{(l)}(\alpha, \hat{n})|l, m'\rangle,$$

donde $D_{m'm}^{(l)}$ son las matrices de Wigner, que forman una representación unitaria irreducible de dimensión $2l + 1$ del grupo $SU(2)$.

La conclusión fundamental es:

Una rotación finita no cambia el número cuántico l ; solo mezcla las proyecciones m . Para cambiar l se requiere una interacción física real, no una simple rotación pasiva.

Esta es la primera manifestación de la inercia direccional cuántica: la magnitud del momento angular es una etiqueta topológica que las rotaciones no pueden alterar. Cambiarla exige transicionar entre representaciones irreducibles distintas, lo que solo es posible mediante un operador tensorial que actúe como puente entre sectores ortogonales del espacio de Hilbert.

3. Reglas de selección y el teorema de Wigner-Eckart

Las transiciones entre estados con diferentes valores de l están gobernadas por las reglas de selección, que emergen del teorema de Wigner-Eckart.

Para un operador tensorial $T_q^{(k)}$ de rango k , el elemento de matriz entre estados $|l, m\rangle$ y $|l', m'\rangle$ se factoriza como

$$\langle l', m' | T_q^{(k)} | l, m \rangle = \langle l' || T^{(k)} || l \rangle \langle l, m; k, q | l', m' \rangle,$$

donde el primer factor es el **elemento de matriz reducido**, independiente de m y m' , y el segundo es el **coeficiente de Clebsch-Gordan**.

El coeficiente de Clebsch-Gordan es no nulo solo si se satisfacen dos condiciones:

1. **Desigualdad triangular:**

$$|l - k| \leq l' \leq l + k.$$

2. **Regla de paridad:** si $T^{(k)}$ tiene paridad definida $(-1)^k$ (como el operador dipolar eléctrico, $k = 1$, paridad impar), entonces

$$l + k + l' \text{ debe ser par.}$$

Para el caso dipolar eléctrico ($k = 1$, paridad impar), estas condiciones dan

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = 0, \pm 1,$$

con $l = 0 \Leftrightarrow l' = 0$. Nótese que la regla de paridad **excluye** $\Delta l = 0$ para operadores de paridad impar, aunque la desigualdad triangular lo permitiría en principio.

Esta estructura es la traducción cuántica de la anisotropía inducida por el estado: un estado con un l definido solo puede transitar a estados seleccionados, y cada transición tiene un costo energético asociado a la diferencia de niveles.

4. Estados coherentes de momento angular y dirección emergente

Para conectar con la noción clásica de dirección, es fundamental introducir los **estados coherentes de momento angular** (estados de Perelomov o estados $SU(2)$).

Un estado coherente de momento angular apuntando en la dirección $\hat{n}$ se define como

$$|\hat{n}\rangle = D_{\hat{n}}(\alpha)|l, l\rangle,$$

es decir, una rotación del estado de máxima proyección $|l, l\rangle$. Este estado tiene:

- Momento angular promedio:

$$\langle \vec{L} \rangle = \hbar l \hat{n}.$$

- Incertidumbre angular mínima:

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{\sqrt{l}}.$$

Este resultado es crucial: **la incertidumbre angular de un estado coherente decrece como $1/\sqrt{l}$** , mucho más lentamente que la separación entre nodos de los armónicos esféricos ($\sim \pi/l$). Para l grande, el estado se localiza en una dirección, emergiendo así la noción clásica de dirección como un límite de paquetes de ondas angulares estrechos.

La dirección cuántica nunca es un punto: es un parche difuso en la esfera celestial cuyo tamaño mínimo está determinado por l . Esta es la manifestación cuántica de la imposibilidad de preparar un estado con dirección perfectamente definida.

5. Incertidumbre angular y límites fundamentales

La relación de incertidumbre entre una coordenada angular ϕ y su momento conjugado L_z se escribe comúnmente como

$$\Delta\phi \Delta L_z \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Sin embargo, esta relación debe tomarse con cautela: el ángulo ϕ es una variable periódica, y no existe un operador autoadjunto de ángulo globalmente bien definido sobre todo el círculo. La forma rigurosa, debida a Judge y Lewis, involucra la varianza

de la variable exponencial $e^{i\phi}$, y se reduce a la relación anterior solo en el límite de paquetes bien localizados.

Cualitativamente, la idea es correcta: **no se puede preparar un estado con dirección perfectamente definida sin una incertidumbre correspondientemente grande en el momento angular**. Cualquier intento de girar un sistema en un ángulo exacto $\Delta\theta$ requiere una superposición de autoestados de momento angular, y la dispersión en l está inevitablemente ligada a la precisión angular.

6. Dos escenarios físicos: rotor confinado versus partícula libre

a) Rotor rígido: cambio de magnitud del momento angular

Para un sistema **ligado** con grados de libertad rotacionales internos, como una molécula diatómica o un núcleo deformado, el hamiltoniano es

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2I},$$

donde I es el momento de inercia. Los niveles de energía son

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1),$$

y la separación entre niveles consecutivos es

$$\Delta E_{l \rightarrow l+1} = \frac{\hbar^2}{I} (l+1).$$

Cambiar la magnitud del momento angular ($l \rightarrow l+1$) cuesta esta energía, que crece linealmente con l . En este sistema, la resistencia a cambiar la magnitud del momento angular tiene un significado energético directo: cada cuanto de momento angular adicional cuesta más que el anterior.

b) Partícula libre: cambio de dirección sin cambio de energía

Para una **partícula libre**, el hamiltoniano es

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

y los autoestados de momento $|\vec{p}\rangle$ tienen energía

$$E = \frac{p^2}{2m},$$

que depende solo de la magnitud de $\vec{p}$, no de su dirección. Por tanto, **rotar la dirección del momento manteniendo su magnitud no cuesta energía intrínseca**:

el hamiltoniano es invariante bajo rotaciones, y la transformación $\vec{p} \rightarrow \vec{p}'$ con $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ es una operación unitaria que conmuta con H .

El costo no es energético sino probabilístico: producir esa rotación requiere una interacción con un agente externo, y la eficiencia de esa interacción está gobernada por la **sección eficaz diferencial de dispersión** $d\sigma/d\Omega$. La probabilidad de que un potencial disperse la onda plana hacia un ángulo θ está codificada en la matriz de dispersión, que a su vez depende de las fases de cada onda parcial.

7. Dispersión y ondas parciales: la dirección como interferencia de momentos angulares

La expansión de una onda plana en ondas parciales es

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_l^m(\hat{k})^* Y_l^m(\hat{r}),$$

donde $j_l(kr)$ son las funciones de Bessel esféricas. Cada onda parcial tiene un momento angular definido l , y la dirección del momento $\hat{k}$ emerge de la **interferencia coherente de infinitas ondas parciales**.

Cambiar la dirección de $\vec{k}$ a $\vec{k}'$ no implica saltar de un l a otro, sino redistribuir las amplitudes de las ondas parciales mediante la interacción con el potencial. La amplitud de dispersión es

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos\theta),$$

donde δ_l son los desfases y P_l los polinomios de Legendre. La sección eficaz diferencial es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2.$$

Esta es la manifestación cuántica de la inercia direccional para partículas libres: la probabilidad de cambiar la dirección en un ángulo θ está determinada por la interferencia entre ondas parciales, no por una brecha energética discreta.

En el límite de altas energías o ángulos pequeños, la descripción clásica se recupera: el cambio de momento $\Delta\vec{p} = \hbar(\vec{k}' - \vec{k})$ tiene magnitud

$$|\Delta\vec{p}| = 2\hbar k \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right),$$

que es exactamente la fórmula clásica $J = 2p\sin(\Delta\theta/2)$ con $p = \hbar k$.

8. Espín, fases topológicas y la geometría de las direcciones

Para partículas con espín s , el generador de rotaciones es $\vec{S}$, y los estados $|s, m_s\rangle$ tienen $2s + 1$ proyecciones posibles. Una rotación finita se implementa mediante

$$D_{\hat{n}}(\alpha) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{n} \cdot \vec{S}\right),$$

y, al igual que en el caso orbital, no cambia s .

Sin embargo, hay una diferencia topológica profunda. Para espín semientero ($s = 1/2, 3/2, \dots$), el grupo de simetría relevante no es $SO(3)$ sino su recubridor universal $SU(2)$. Esto implica que una rotación de 2π no devuelve el estado a sí mismo:

$$D_{\hat{n}}(2\pi)|\psi\rangle = -|\psi\rangle.$$

Se requiere una rotación de 4π para recuperar el estado original. La esfera de direcciones para un espinor no es la esfera S^2 usual, sino que está relacionada con la estructura del fibrado de Hopf.

Esta fase topológica es una forma adicional de inercia direccional: la dirección de un fermión tiene una memoria topológica que no existe en el mundo clásico. Girar un espinor 360 grados lo deja en un estado físicamente distinguible del original.

9. Simetrías, Noether y representaciones del grupo de rotaciones

En mecánica cuántica, la conservación del momento angular es consecuencia de la isotropía del espacio, de acuerdo con el teorema de Noether. El grupo de rotaciones $SO(3)$ actúa sobre el espacio de Hilbert mediante representaciones unitarias, y cada representación irreducible está etiquetada por l (o s).

La isotropía del espacio se traduce en que el hamiltoniano de un sistema aislado conmuta con todos los generadores de rotaciones:

$$[H, L_i] = 0.$$

Por tanto, l es un buen número cuántico. Cambiar l requiere romper la simetría rotacional mediante una interacción externa que no conmute con $\vec{L}$.

Esto es el análogo cuántico exacto de la anisotropía inducida por el estado en mecánica clásica: las leyes son isótropas, pero un estado particular con un valor definido de l selecciona una representación irreducible del grupo de rotaciones. Cambiar ese estado cuesta energía proporcional a la diferencia entre niveles, y solo es posible mediante un operador tensorial que actúe como puente entre representaciones distintas.

10. Resistencia angular efectiva cuántica: una definición cuidadosa

La noción de resistencia angular efectiva, definida en mecánica clásica como

$$R_{\theta} = \frac{dK_{\min}}{d(\Delta\theta)},$$

requiere una reformulación cuidadosa en mecánica cuántica, porque el costo energético depende del tipo de sistema:

a) Sistemas confinados (rotor rígido, átomos, moléculas)

Para cambiar la magnitud del momento angular de l a $l + 1$, la energía mínima es

$$\Delta E_{l \rightarrow l+1} = \frac{\hbar^2}{I} (l + 1).$$

La incertidumbre angular de un estado coherente con momento angular l es $\Delta\theta \sim 1/\sqrt{l}$. Si definimos la resistencia angular efectiva como la energía por unidad de incertidumbre angular,

$$R_{\theta}^{\text{confinado}} = \frac{\Delta E_{l \rightarrow l+1}}{\Delta\theta} \approx \frac{\hbar^2}{I} (l + 1) \sqrt{l} \approx \frac{\hbar^2}{I} l^{3/2}.$$

Esta magnitud crece con l , reflejando que los niveles se separan cada vez más.

b) Partículas libres

Para una partícula libre, cambiar la dirección no cuesta energía intrínseca: la resistencia angular efectiva es **cero** en ausencia de interacción. El costo se manifiesta en la probabilidad de dispersión: la sección eficaz diferencial $d\sigma/d\Omega$ determina cuán probable es redirigir la partícula en un ángulo dado.

La transferencia de momento en una dispersión es

$$\Delta\vec{p} = \hbar(\vec{k}' - \vec{k}),$$

y su magnitud es

$$|\Delta\vec{p}| = 2\hbar k \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right),$$

que coincide formalmente con el resultado clásico $J = 2p \sin(\Delta\theta/2)$.

c) Límite clásico

El límite clásico se obtiene tomando $\hbar \rightarrow 0$ con $\hbar l = L_{\text{clásico}}$ fijo. En este límite:

- La incertidumbre angular $\Delta\theta \sim 1/\sqrt{l} \sim \sqrt{\hbar/L} \rightarrow 0$, de modo que la dirección emerge como un observable bien definido.
- La separación entre niveles $\Delta E \sim \hbar^2 l/I \sim \hbar L/I \rightarrow 0$, de modo que el espectro se vuelve continuo.
- La resistencia angular efectiva del rotor rígido se desvanece, y la descripción clásica se recupera exactamente.

Es importante no confundir el límite $l \rightarrow \infty$ a $\hbar$ fijo (que mantiene la cuantización) con el límite clásico real $\hbar \rightarrow 0$ (que elimina la discreción del espectro).

11. Conclusión

La mecánica cuántica introduce restricciones fundamentales al cambio de dirección de un sistema físico:

1. **Cuantización del momento angular:** solo los valores discretos $l = 0, 1, 2, \dots$ son permitidos, y las rotaciones unitarias no cambian l , solo mezclan proyecciones m .
2. **Reglas de selección:** las transiciones entre estados con diferente l están gobernadas por el teorema de Wigner-Eckart y las reglas de paridad, que restringen los saltos posibles.
3. **Distinción entre rotación y transición:** rotar la dirección de un estado cuántico (operación unitaria) no cuesta energía en un hamiltoniano isótropo; cambiar la magnitud del momento angular sí cuesta una energía discreta.
4. **Incertidumbre angular:** no existe un estado con dirección perfectamente definida; la precisión angular está limitada por el número cuántico l .
5. **Dos regímenes físicos:** para sistemas confinados, la resistencia angular efectiva está asociada a brechas energéticas; para partículas libres, está asociada a probabilidades de dispersión.
6. **Topología:** para espines semienteros, la geometría de las direcciones es topológicamente no trivial, con una fase de 4π que no existe en el mundo clásico.

La inercia direccional, que en mecánica clásica se manifestaba como una resistencia continua al giro, en mecánica cuántica se convierte en una propiedad algebraica y topológica: solo ciertos cambios de dirección son posibles, y cada uno tiene un costo bien definido, ya sea energético (sistemas confinados) o probabilístico (partículas libres).

Esta extensión completa la tetralogía sobre la inercia direccional:

- **Mecánica clásica:** la dirección es un vector en el espacio euclidiano; el costo es la distancia métrica en el espacio de momentos.

- **Relatividad especial:** la dirección es un vector en el espacio de Minkowski; el costo está modificado por la geometría hiperbólica y la masa transversal.
- **Relatividad general:** la dirección es un vector en el fibrado tangente de una variedad curva; el costo depende del transporte paralelo y la holonomía.
- **Mecánica cuántica:** la dirección es un estado en una representación del grupo de rotaciones; el costo es la brecha energética entre niveles discretos o la probabilidad de dispersión.

En cada teoría, la dirección del movimiento emerge como un grado de libertad con un costo gobernado por la geometría del espacio de estados, ya sea euclidiano, minkowskiano, curvo o cuántico.

Teoría de campos: ruptura espontánea de simetría, vacío y la geometría de la inercia direccional

Introducción

En las extensiones anteriores, la inercia direccional se manifestaba como el costo energético de cambiar la dirección del movimiento de un cuerpo. En mecánica clásica, ese costo estaba ligado a la métrica del espacio de momentos; en relatividad especial, a la geometría hiperbólica de la capa de masa; en relatividad general, a la conexión afín y a la holonomía; y en mecánica cuántica, a la cuantización del momento angular y a las reglas de selección.

En teoría de campos, el concepto de dirección adquiere un significado aún más profundo. Ya no se trata de la dirección espacial de un objeto, sino de la **dirección en el espacio interno de campos**. La ruptura espontánea de simetría —el mecanismo por el cual el estado fundamental de un sistema no comparte la simetría de las leyes— es el origen de las masas de las partículas elementales y de la estructura del vacío en el Modelo Estándar.

Esta extensión formaliza la idea de ruptura de simetría por el estado en teoría cuántica de campos, establece su conexión con la noción de inercia direccional y muestra cómo el vacío mismo selecciona una dirección privilegiada en un espacio interno, con consecuencias observables como los bosones de Goldstone y el mecanismo de Higgs.

1. Simetrías globales y corrientes conservadas en teoría de campos

En teoría clásica de campos, una teoría está definida por una densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, donde ϕ es un campo que puede tener varias componentes internas. Una

transformación de simetría es una operación sobre los campos que deja invariante la acción.

Para una simetría continua global, el teorema de Noether asegura la existencia de una corriente conservada. Si la transformación infinitesimal es

$$\phi_i \rightarrow \phi_i + i\epsilon^a (T^a)_{ij} \phi_j,$$

donde T^a son los generadores de la simetría, la corriente conservada es

$$J^{\mu a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (iT^a_{ij} \phi_j),$$

y satisface

$$\partial_\mu J^{\mu a} = 0.$$

La carga conservada correspondiente es

$$Q^a = \int d^3x J^{0a},$$

que actúa como generador de la simetría en el espacio de Hilbert.

En mecánica cuántica, la simetría se realiza mediante operadores unitarios que conmutan con el hamiltoniano:

$$[H, Q^a] = 0.$$

La cuestión central es cómo se realiza esta simetría en el estado fundamental.

2. Realización de simetrías: modo Wigner y modo Nambu-Goldstone

Existen dos formas en que una simetría puede realizarse en un sistema cuántico:

a) Modo Wigner (simetría no rota)

El estado fundamental $|0\rangle$ es invariante bajo la acción de los generadores:

$$Q^a |0\rangle = 0.$$

En este caso, las partículas del espectro se organizan en multipletes degenerados de la simetría, y las cargas conservadas aniquilan el vacío.

b) Modo Nambu-Goldstone (simetría espontáneamente rota)

El estado fundamental no es invariante:

$$Q^a |0\rangle \neq 0.$$

Esto implica que existe un operador local $\Phi(x)$ cuyo valor esperado en el vacío no es nulo:

$$\langle 0|\Phi(x)|0\rangle \neq 0.$$

Esta cantidad, llamada **valor esperado en el vacío** (VEV), actúa como un parámetro de orden que rompe la simetría. El teorema de Goldstone asegura que por cada generador de simetría roto aparece una partícula sin masa, el **bosón de Goldstone**, siempre que se cumplan ciertas condiciones técnicas (invariancia Lorentz y que la corriente tenga matriz no nula entre el vacío y el estado de una partícula).

3. El modelo de campo escalar complejo con simetría global U(1)

Usaremos la signatura métrica $(+, -, -, -)$ y la convención $\mathcal{L} = \text{término cinético} - V(\phi)$.

3.1 Lagrangiano y potencial

Consideremos la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi),$$

con el potencial

$$V(\phi) = -\mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4,$$

donde $\mu^2 > 0$ y $\lambda > 0$. Este potencial tiene un mínimo degenerado en

$$|\phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2},$$

donde $v = \mu/\sqrt{\lambda}$ es la escala de ruptura. Los mínimos forman un círculo en el plano complejo:

$$\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\theta},$$

con θ arbitrario. La simetría $U(1)$ actúa como

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi,$$

rotando el campo en el espacio interno. El potencial es invariante bajo esta rotación, pero un mínimo concreto elige un valor particular de θ , rompiendo así la simetría.

3.2 Expansión alrededor del vacío

Elegimos, sin pérdida de generalidad, el vacío en $\theta = 0$:

$$\langle \phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Expandiendo el campo alrededor de este mínimo,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x) + i\pi(x)),$$

donde $h(x)$ es el campo real de Higgs y $\pi(x)$ es el campo de Goldstone. Sustituyendo en el potencial y desarrollando hasta segundo orden,

$$V(h, \pi) = V_0 + \mu^2 h^2 + \mathcal{O}(h^3, h^4, \pi^3, \dots).$$

Usando la forma estándar $\frac{1}{2}m_h^2 h^2$, identificamos

$$m_h^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2.$$

El campo π **no tiene término de masa**:

$$m_\pi^2 = 0.$$

Este es el bosón de Goldstone: la dirección a lo largo del círculo de mínimos (dirección angular θ) no cuesta energía, porque mover el vacío a lo largo del círculo degenerado no cambia el potencial. En cambio, moverlo radialmente (cambiar la magnitud de $|\phi|$) cuesta una energía determinada por la masa de Higgs.

3.3 Interpretación geométrica

El espacio interno del campo complejo es un plano. El potencial tiene un valle circular de mínimos. La elección de un vacío particular selecciona una dirección en este espacio interno. La dirección angular (a lo largo del valle) es **blanda**: las excitaciones asociadas (Goldstone) son sin masa. La dirección radial (perpendicular al valle) es **dura**: las excitaciones asociadas (Higgs) son masivas.

Esta es la versión campo-teórica de la inercia direccional: **el vacío ha roto la simetría rotacional del espacio interno, seleccionando una dirección privilegiada. Cambiar esa dirección a lo largo del valle no cuesta energía; cambiar la magnitud del campo cuesta una energía proporcional a la masa del Higgs.** La analogía es estructural y geométrica, no numérica: en mecánica clásica, cambiar la dirección de $\vec{p}$ manteniendo $|\vec{p}|$ constante cuesta impulso aunque no cambie la energía cinética; en QFT, excitar un Goldstone no cuesta energía ni impulso en el límite de longitud de onda larga.

4. Teorema de Goldstone

El teorema de Goldstone establece de manera general que, en una teoría con simetría global continua espontáneamente rota, por cada generador de simetría roto existe una partícula sin masa en el espectro, siempre que la teoría sea invariante Lorentz y la corriente de Noether tenga un elemento de matriz no nulo entre el vacío y el estado de una partícula.

Formalmente, si la simetría rota tiene N generadores, de los cuales n son espontáneamente rotos (es decir, $Q^a|0\rangle \neq 0$ para $a = 1, \dots, n$), entonces aparecen n bosones de Goldstone.

En el modelo $U(1)$, hay un solo generador roto, y aparece un solo bosón de Goldstone, π .

4.1 Consecuencias físicas

Los bosones de Goldstone son los modos de excitación de la fase del vacío. En sistemas de materia condensada, se manifiestan como ondas de espín (magnones) en ferromagnetos, o como fonones en cristales. Cabe señalar una sutileza: en ferromagnetos no relativistas, la ruptura $SO(3) \rightarrow SO(2)$ rompe dos generadores pero produce un solo magnón con relación de dispersión cuadrática ($\omega \propto k^2$), no lineal como el Goldstone relativista estándar. Este es un caso de los llamados bosones de Goldstone tipo B, que ocurren cuando los generadores rotos no conmutan entre sí y existe una densidad de carga no nula en el vacío.

En física de partículas, los bosones de Goldstone sin masa no se observan directamente como partículas físicas en el Modelo Estándar electrodébil, porque la simetría relevante es **local** y los bosones de Goldstone son absorbidos por los bosones de gauge mediante el mecanismo de Higgs.

5. De la simetría global a la simetría local: el mecanismo de Higgs

5.1 Lagrangiano con simetría gauge $U(1)$

Promovamos la simetría global $U(1)$ a una simetría local. Para ello, introducimos un campo gauge A_μ y la derivada covariante

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - igA_\mu \phi,$$

donde g es la carga gauge. El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

La simetría local es

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x).$$

5.2 Ruptura espontánea y masas

Nuevamente, el mínimo del potencial está en $|\phi| = v/\sqrt{2}$. Expandimos alrededor del vacío:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\pi).$$

El término cinético contiene

$$|D_\mu \phi|^2 = \left| (\partial_\mu - igA_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\pi) \right|^2.$$

Al desarrollar, aparece un término

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 + \frac{1}{2}g^2 v^2 A_\mu A^\mu - gvA_\mu \partial^\mu \pi + \dots$$

El campo π no tiene masa, pero está mezclado con el campo gauge A_μ mediante el término de mezcla $-gvA_\mu \partial^\mu \pi$.

Este es el mecanismo de Higgs: el bosón de Goldstone π es “comido” por el campo gauge, que adquiere masa

$$M_A = gv.$$

Contemos grados de libertad. Antes de la ruptura:

- ϕ complejo: 2 grados reales (h y π).
- A_μ sin masa: 2 grados físicos (polarizaciones transversales).

Después de la ruptura, en el **gauge unitario** (donde $\pi = 0$):

- Higgs h : 1 grado masivo.
- A_μ masivo: 3 grados físicos (polarizaciones transversales + longitudinal).

El grado de libertad del bosón de Goldstone π se ha convertido en la polarización longitudinal del bosón gauge masivo. No queda ninguna partícula sin masa de Goldstone.

5.3 Interpretación geométrica

En el caso global, el vacío degenerado era un círculo; moverse a lo largo del círculo no costaba energía (Goldstone). En el caso local, la transformación de fase local $\alpha(x)$ es una redundancia de la descripción gauge: dos puntos del círculo conectados por una transformación gauge representan el mismo estado físico. Por tanto, el bosón de Goldstone no es una partícula física independiente; su grado de libertad se transforma en la componente longitudinal del campo gauge masivo.

Cabe precisar un punto técnico: según el teorema de Elitzur, una simetría gauge local **no puede romperse espontáneamente** de manera formal, porque el valor esperado de cualquier operador no invariante gauge es cero. Lo que ocurre es que se **fija un gauge** (por ejemplo, el gauge unitario) en el cual el VEV aparece no nulo, revelando el mecanismo de Higgs. En el lenguaje fenomenológico habitual se dice que la simetría

gauge se “rompe espontáneamente”, pero estrictamente la simetría gauge se mantiene intacta; lo que se rompe es una simetría global residual.

La dirección en el espacio interno ya no es un observable físico: es fijada por la elección de gauge. Lo que sí es físico es la **magnitud** de la desviación radial, el campo de Higgs, que tiene masa $m_h = \sqrt{2\lambda}v$.

6. El Modelo Estándar electrodébil

El mecanismo de Higgs se aplica en el Modelo Estándar para romper la simetría electrodébil

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}.$$

6.1 Contenido de campos

- Bosones gauge: $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$ de $SU(2)_L$, y B_μ de $U(1)_Y$.
- Doblete escalar complejo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix},$$

con cuatro componentes reales. La simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ tiene cuatro generadores.

6.2 Ruptura

El potencial del doblete es

$$V(\Phi) = -\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4,$$

con mínimo en

$$|\Phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}.$$

Elegimos el vacío en la dirección neutra:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Esta elección preserva la simetría $U(1)_{\text{em}}$ porque el componente con carga eléctrica (ϕ^+) tiene VEV cero.

De los cuatro generadores, tres se rompen espontáneamente (los asociados a $W^\pm$ y Z), y uno permanece sin romper (el de $U(1)_{\text{em}}$, que combina W^3 y B).

6.3 Masas de los bosones gauge

Los bosones $W^\pm$ adquieren masa

$$M_W = \frac{gv}{2},$$

y el bosón Z adquiere masa

$$M_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2} v}{2} = \frac{M_W}{\cos\theta_W},$$

donde g y g' son las constantes de acoplamiento de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, y θ_W es el ángulo de Weinberg. El fotón permanece sin masa:

$$M_\gamma = 0.$$

6.4 El bosón de Higgs

De las cuatro componentes reales del doblete, tres son absorbidas como polarizaciones longitudinales de $W^\pm$ y Z . Queda una componente física, el bosón de Higgs h , con masa

$$m_h = \sqrt{2\lambda} v = \sqrt{2}\mu.$$

Experimentalmente, $m_h \approx 125$ GeV, y $v \approx 246$ GeV.

7. La geometría del vacío y la inercia direccional

La conexión con el concepto de inercia direccional es profunda. En mecánica clásica y relativista, un estado con $\vec{p} \neq 0$ rompe la isotropía espacial: el vector momento selecciona una dirección en el espacio. Cambiar esa dirección cuesta energía (impulso).

En teoría de campos, el vacío con $\langle\Phi\rangle \neq 0$ rompe la simetría interna: el campo selecciona una dirección en el espacio de campos. La diferencia es que:

- En mecánica, la dirección está en el espacio físico, y la ruptura es inducida por las condiciones iniciales (el estado particular del sistema).
- En teoría de campos, la dirección está en el espacio interno de los campos, y la ruptura es espontánea: el vacío mismo elige una de las direcciones degeneradas.

El análogo de la resistencia angular es:

- **Dirección angular en el espacio interno:** excitar el modo de Goldstone (cambiar la fase del vacío) no cuesta energía en el caso global, o es una redundancia gauge en el caso local.

- **Dirección radial:** excitar el modo de Higgs (cambiar la magnitud de $|\Phi|$) cuesta una energía proporcional a m_h .

En el caso global, los bosones de Goldstone son exactamente las excitaciones que mueven el vacío a lo largo del valle degenerado. Son análogos a las rotaciones espaciales en mecánica: cambiar la dirección del vacío en el espacio interno no cuesta energía porque el potencial es simétrico.

Sin embargo, la elección del vacío rompe la simetría y define una dirección privilegiada. Las excitaciones alrededor de esa dirección son de dos tipos:

- **Longitudinales (Goldstone):** a lo largo del valle, sin masa.
- **Transversales (Higgs):** perpendiculares al valle, con masa.

Esta es la versión campo-teórica de la inercia direccional: **la magnitud del campo de Higgs representa la resistencia a desviarse de la dirección elegida por el vacío, mientras que la fase de Goldstone representa la libertad de moverse a lo largo de las direcciones degeneradas sin costo.** La diferencia fundamental con la mecánica clásica es que aquí la “resistencia” es una masa: o se tiene suficiente energía para crear un cuanto de Higgs ($E \geq m_h c^2$), o no se puede excitar el modo radial. Es una resistencia cuantizada y discreta, no continua.

8. Ruptura espontánea versus explícita versus anisotropía por el estado

Es importante distinguir tres situaciones:

- **Ruptura espontánea:** el lagrangiano es invariante, pero el estado fundamental no lo es. La simetría está escondida, no rota en las leyes. Consecuencia: bosones de Goldstone (global) o mecanismo de Higgs (local).
- **Ruptura explícita:** el lagrangiano contiene términos que no son invariantes. No hay bosones de Goldstone; la simetría no existe en absoluto.
- **Anisotropía inducida por el estado:** el lagrangiano es invariante, pero un estado particular (no necesariamente el fundamental) no comparte esa simetría.

En las extensiones anteriores de mecánica clásica y relatividad, la anisotropía inducida por el estado $\vec{p} \neq 0$ pertenece a esta tercera categoría: las leyes son isótropas, pero el estado particular no lo es. No es ruptura explícita, porque el lagrangiano o hamiltoniano no contiene ningún término que prefiera una dirección. Tampoco es ruptura espontánea en el sentido técnico de teoría de campos, porque el estado fundamental clásico ($\vec{p} = 0$) sí es simétrico; la anisotropía proviene de una condición inicial arbitraria, no de una degeneración del vacío.

En teoría de campos, la ruptura es **espontánea** porque el vacío mismo selecciona una dirección; no hay una condición externa que prefiera una dirección sobre otra. La diferencia con el caso clásico es sutil pero crucial: en mecánica clásica, la dirección

privilegiada es una propiedad del estado excitado (impuesta desde fuera); en QFT, la dirección privilegiada es una propiedad del estado fundamental (elegida por el propio sistema entre un continuo degenerado).

9. Simetría a temperatura finita y restauración

La ruptura espontánea de simetría depende de la temperatura. A alta temperatura, los efectos térmicos restauran la simetría: el valor esperado en el vacío se anula,

$$\langle \Phi \rangle_T \rightarrow 0 \quad \text{cuando } T \rightarrow T_c.$$

La temperatura crítica T_c es típicamente del orden de la escala de ruptura:

$$T_c \sim v.$$

Por encima de T_c , la simetría se restaura y el vacío es invariante. Por debajo de T_c , el vacío se enfría y selecciona espontáneamente una dirección.

Cabe precisar que en el Modelo Estándar con la masa del Higgs observada ($m_h \approx 125$ GeV), la transición electrodébil no es una transición de fase termodinámica genuina (de primer o segundo orden), sino un **crossover suave**: no hay una temperatura crítica estrictamente definida ni discontinuidad en el parámetro de orden. Una transición de fase real requeriría física más allá del Modelo Estándar.

Este fenómeno tiene un análogo en la inercia direccional: a altas energías, las direcciones se vuelven equivalentes porque el sistema tiene suficiente energía para explorar todo el valle degenerado; a bajas energías, el sistema se congela en una dirección particular y aparece una dirección privilegiada.

En el universo temprano, la simetría electrodébil estaba restaurada. Al enfriarse el universo por debajo de $T \sim 10^{15}$ K, el vacío experimentó un crossover y seleccionó una dirección, dando masa a los bosones W y Z y dejando el fotón sin masa.

10. Conclusiones

La teoría de campos completa la pentalogía sobre la inercia direccional al trasladar el concepto desde el espacio físico hasta el espacio interno de los campos.

1. **Simetrías globales y locales:** en teoría de campos, las simetrías pueden ser globales (Noether) o locales (gauge). La realización de la simetría en el vacío determina el espectro de partículas.
2. **Ruptura espontánea de simetría:** el vacío con $\langle \Phi \rangle \neq 0$ rompe espontáneamente la simetría, seleccionando una dirección en el espacio interno de campos. Aparecen bosones de Goldstone (global) o masas de gauge (local).

3. **Geometría del vacío:** el potencial tiene un valle degenerado. La dirección angular a lo largo del valle es blanda (Goldstone); la dirección radial es dura (Higgs).
4. **Mecanismo de Higgs:** los bosones de Goldstone son absorbidos por los campos gauge, que adquieren masa. El bosón de Higgs permanece como excitación masiva de la magnitud del campo. Estrictamente, la simetría gauge local no se rompe (teorema de Elitzur); se fija un gauge en el que el VEV aparece no nulo.
5. **Modelo Estándar:** la ruptura $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ genera las masas de $W^\pm$ y Z , deja el fotón sin masa y predice el bosón de Higgs.
6. **Inercia direccional en campos:** la resistencia a cambiar la dirección en el espacio interno es cero a lo largo del valle degenerado (Goldstone) o es una redundancia gauge (local). Cambiar la magnitud del campo cuesta una energía proporcional a la masa del Higgs. El vacío selecciona una dirección privilegiada, y esa selección es la manifestación más profunda de la inercia direccional.

La progresión conceptual de la pentalogía queda así:

- **Mecánica clásica:** la dirección es un vector en el espacio euclidiano; el costo es la distancia métrica en el espacio de momentos.
- **Relatividad especial:** la dirección es un vector en el espacio de Minkowski; el costo está modificado por la geometría hiperbólica y la masa transversal.
- **Relatividad general:** la dirección es un vector en el fibrado tangente de una variedad curva; el costo depende del transporte paralelo y la holonomía.
- **Mecánica cuántica:** la dirección es un estado en una representación del grupo de rotaciones; el costo es la brecha energética entre niveles discretos o la probabilidad de dispersión.
- **Teoría de campos:** la dirección es una elección del vacío en el espacio interno de campos; el costo es la masa del Higgs para desviarse de esa dirección, mientras que moverse a lo largo del valle degenerado no cuesta energía (Goldstone) o es una redundancia gauge.

En cada nivel, la inercia direccional emerge como una consecuencia de la geometría del espacio de estados y de la simetría de las leyes físicas. La ruptura espontánea de simetría en el Modelo Estándar es el ejemplo más profundo: el vacío mismo, al seleccionar una dirección, da masa a las partículas y estructura el universo observable.

Atribución/Reconocimiento 4.0 Internacional

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Usted es libre de:

1. **Compartir** — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato para cualquier propósito, incluso comercialmente.
2. **Adaptar** — remezclar, transformar y construir a partir del material para cualquier propósito, incluso comercialmente.
3. La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Bajo los siguientes términos:

1. **Atribución** — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#) , brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#) . Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.
2. **No hay restricciones adicionales** — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.